**Serie de Fourier**

Bienvenidos a este segundo video de "Aplicaciones de la Transformada de Fourier". En el segundo video de esta semana formalizaremos matemáticamente la serie de Fourier, estudiando la forma trigonométrica, la forma compleja y cómo se obtienen los coeficientes de Fourier de una función periódica.

**Forma Trigonométrica**

Anteriormente describimos la Serie de Fourier como una representación de una función periódica como suma de sinusoides, lo que significa que una función $f(t)$ periódica de período T puede expresarse como una suma de senos y cosenos de diferentes frecuencias, donde cada sinusoide tiene una aplitud llamada coeficiente. Esto se puede expresar matemáticamente de la siguiente forma:

donde

Esta forma es especialmente útil cuando f es real (dado que y son reales) o si f tiene ciertas propiedades de simetría (entonces se obtiene una serie de senos, que son una función impar, o cosenos, que son una función par).

Una pregunta muy válida que hacerse luego de observar la expansión en serie de Fourier es cómo se obtienen los coeficientes y . Para esto observaremos la forma compleja de la serie, la demostración del cálculo de los coeficientes complejos y usaremos la identidad de Euler.

**Forma Compleja**

Recordemos que la Serie de Fourier es una representación de una función periódica como suma de sinusoides. En este contexto es muy útil recordar la identidad de Euler:

A partir de esto, es posible expresar la Serie de Fourier, que es una suma de sinusoides, como una suma de exponenciales complejas.

Sea una función periódica de período T para todo . Definimos los espacios vectoriales y para funciones de período T que son integrables y cuadrado-integrables sobre [0,T], respectivamente. Nótese que . En , podemos definir el producto interno como:

y la norma como:

Dotar al espacio de un producto interno permite definir la ortonormalidad de dos elementos del espacio. Dos elementos del espacio son ortonormales si ( f , g ) = 1

El teorema de las Series de Fourier en dice que toda se puede descomponer de forma unívoca mediante la siguiente serie:

Donde los coeficientes están dados por:

Descomposición en exponenciales complejas:

Esta idea es muy poderosa. El hecho que una función periódica pueda descomponerse en una suma de funciones bases exponenciales complejas, cada una de ellas ponderada por el producto interno entre la función y cada una de las mismas bases, implica que las bases de Fourier son ortonormales, es decir, el producto interno entre ellas es 1:

¿Cómo aporta saber esto a encontrar los coeficientes?

Supongamos, primero que la idea de descomponer f(t) en sumas de sinusoides es válida. ¿Cómo podríamos encontrar los coeficientes ? Consideremos primero una suma finita:

Intentemos encontrar el coeficiente para n=k, con k fijo. Podemos aislar este componente multiplicando a ambos lados por :

entonces podemos aislar , mediante la siguiente expresión

Esto nos permite calcular en término de todos los otros coeficientes . Necesitamos, de alguna forma, de encontrar una expresión para que no dependa de los otros coeficientes. La clave está en integrar ambos lados en un período T. Consideremos el caso . Notamos que:

Dado que con , la expresión anterior se reduce a:

Esto se debe a la propiedad de ortogonalidad de las exponenciales complejas y la operación que hemos realizado formalmente se conoce como el producto interno entre dos funciones.

Este resultado nos permite encontrar una forma compacta de encontrar . Integrando a ambos lados, entonces:

por lo que

Está claro que para una suma infinita, esta expresión para sigue siendo válida. Entonces, hemos encontrado una forma de encontrar los coeficientes de Fourier de una función f(t) periódica de período T.

**Relación entre la Forma Compleja y la Forma Trigonométrica**

La relación explícita viene de la Fórmula de Euler:

Consideremos la Serie de Fourier compleja:

Si ahora reemplazamos la exponencial compleja como suma de senos y cosenos:

Utilizando distributividad de la suma:

Considerando que la Forma Compleja es análoga a la Forma Trigonométrica, es necesario establecer la siguiente relación entre los coeficientes, , y :

Relación entre los coeficientes: